2流体系における定常モードと伝播波の共鳴相互作用

熱対流分岐研究グループ　藤村　薫

Resonant Interaction between Steady-State and Oscillatory Modes in a Two-Layered Fluid Flow

Kaoru FUJIMURA
Research Group for Bifurcation in Thermal Convections

A problem is taken that two different immiscible liquids lie in layers at rest between horizontal walls. When they are heated from below and the temperature difference between the walls reaches a critical value, new solutions bifurcate from the solution at rest. We examine a particular critical situation with a pair of oscillatory modes at wavenumber α and a steady mode at wavenumber 2α. The steady solution and the traveling wave solution are found to be unstable. There is a region of stability for the standing wave solution. A new equilibrium solution, the asymmetric mixed mode, is found to be stable in a parameter range. Bifurcations from the standing wave solution and the asymmetric mixed mode are described.

上面と下面を一様温度でそれぞれ冷却，加熱された，無限の広がりを持つ水平流体層を考える。上下面の温度差が大きくない場合，下面から上面への熱は熱伝導によって移動するため，巨視的な運動は存在しない。温度差が臨界値よりも大きくなると（浮力と粘性力の比であるレイリー数Rがある臨界値Rcを超えると），浮力が粘性力に打ち勝って，巨視的な対流運動が誘起され，熱は効率よく伝達されるようになる。このR=Rcで生じる対流はレイリー・ベナール対流（以下RB対流）と呼ばれる。簡単のため，ここでは2次元問題に話を限る。臨界レイリー数のごく近傍において発生するRB対流はロールと呼ばれ，定常で水平方向に周期的な空間構造を呈する。ロールは，図1 (a)に示したような超臨界分岐によって熱伝導状態から分岐する。ロールの発生条件（Rcの値とその時に発生するロールの単位長さ当たりの個数，すなわち波数），ロールの分岐特性，より複雑な攪乱に対するロールの高次不安定性などについては，過去30年以上にわたって綿密な研究がなされ，成果は，ブッセのバルーンと呼ばれる相図に集大成されている。

以上は，単一の波数を持つロールについての話であるが，複数の異なる波数を持つロール間の相互作用についても，これまで活発に研究が行われてきた。異なる波数α_1，α_2を有する定常モードが相互作用する場合を考えよう。それぞれのモードの振幅をA_1，A_2とする。α_1/α_2が非有理数の場合，A_1とA_2の時間発展を支配する方程式（振幅方程式）に含まれるA_1とA_2の絶対値を通じてのみモード間の相互作用が行われ，A_1とA_2の位相差を規定する因子は含まれない。振幅方程式の平衡解としては，$|A_1|\neq 0$，$|A_2|=0$もしくは$|A_1|=0$，$|A_2|\neq 0$という“純粋モード”，または，$|A_1|\neq 0$，$|A_2|\neq 0$という“混合モード”が存在可能であり，いずれの場合も最終的に得られる対流パターンは定常である。他方，$\alpha_1:\alpha_2$が有理比

m：nの場合，位相差を制限する項が振幅方程式に付加されるため，上に述べた３つの平衡解の他に｜A_1｜≠0，｜A_2｜≠0 かつ n×arg(A_1)－m×arg(A_2) が非零定数値をとる“伝播波解”（対流パターンが伝播波としての性質を示す）が平衡解として可能となる。また，相互作用が最も強い m：n＝1：2の場合には，これらの平衡解から，変調波や定在波，ホモクリニック軌道（不安定な軌道に沿って平衡解から離れ，無限大の時間の後に安定な軌道に乗って同じ平衡解に戻ってくるような軌道）等が分岐することも知られている。以上のようなことは，過去15年程の間に活発に研究され，流体系への応用も含めて，かなりの部分が明らかになってきた。

定常モード間ではなく，定常モードと伝播波間に生じる，有理数の波数比を伴う相互作用については，同心２重円筒間のテイラー・クエット流で発生がよく知られた波数比１：１の相互作用に研究が集中してきた。強い相互作用が生じる波数比２：１の共鳴については，研究はまだ始まったばかりである。[1,2] このノートでは，最近少し進展がえられた後者のケースについて，紹介する。

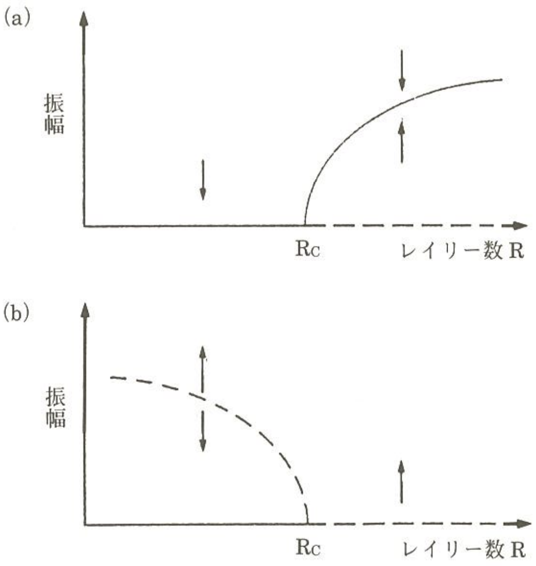

図１　超臨界分岐（a）と亜臨界分岐（b）。実線は安定なブランチ、破線は不安定なブランチを意味し、矢印は振幅の時間発展の方向を示す。

自由界面を境に接している，互いに混ざり合わない２種類の流体（例えば水と油）から成る層を，下から加熱，上から冷却した２流体系の RB 問題を考える。この場合，通常の RB 問題に現れる制御パラメータ（レイリー数とプラントル数）の他に，流体層の厚さの比，粘性の比，温度伝導度の比，熱伝導率の比，密度比，熱膨張率の比など６つの無次元パラメータと表面張力係数がパラメータとして存在するため，どのような条件でどのモードが最初に現れるかを一言で説明することは到底できない（興味をお持ちの方は文献3）を参照されたい）。要点は，これらのパラメータの値によって，定常モードが最初に出現する場合と，伝播波が最初に出現する場合とがあることである。従って，うまくパラメータの値を選んでやれば，あるレイリー数において定常波と伝播波を同時に発生させることが原理的に可能であると容易に想像できる。今回，パラメータ値を注意深く調整することによって，定常モードと伝播波がある臨界レイリー数で同時に発生し，さらに，それらの波数の比が２：１であるような状況を作ることに成功した。

いま対象としている問題は，水平方向に特別な方向性を持たない。従って，伝播波としては，exp［$i\alpha_1(x-ct)$］に比例する右向きの伝播波と，exp［$i\alpha_1(x+ct)$］に比例する左向きの伝播波が同じ確率で発生可能である（x は水平方向の座標，c は伝播波の位相速度，t は時間）。さて，これら２つの伝播波が相互作用を行えば，exp［$2i\alpha_1 x$］に比例するモードが誘起されるが，後者は伝播波と同時に発生する２倍の波数を持った定常モードそのものである。また，定常モードと片方の伝播波との相互作用によってもう片方の伝播波が励起されることも明らかである。このように，波数比２：１の定常モードと伝播波間の相互作用では，２次の非線形項を通じてお互いにエネルギーのやりとりを行うため，３次の非線形項を通じてしかエネルギーのやりとりができない１：１の場合と比較して，相互作用は非常に強力である。さて，右向き伝播波の振幅を A_1，左向きのそれを A_2，定常モードの振幅を A_3 とする。従来の研究では，平衡解としては，｜A_3｜≠0，｜A_1｜＝｜A_2｜＝0という“定常モード”，｜A_1｜≠0，｜A_2｜＝｜A_3｜＝0，または｜A_2｜≠0，｜A_1｜＝｜A_3｜＝0という“伝播波”，｜A_1｜＝｜A_2｜≠0，｜A_3｜≠0という“定在波”が安定に実現可能で

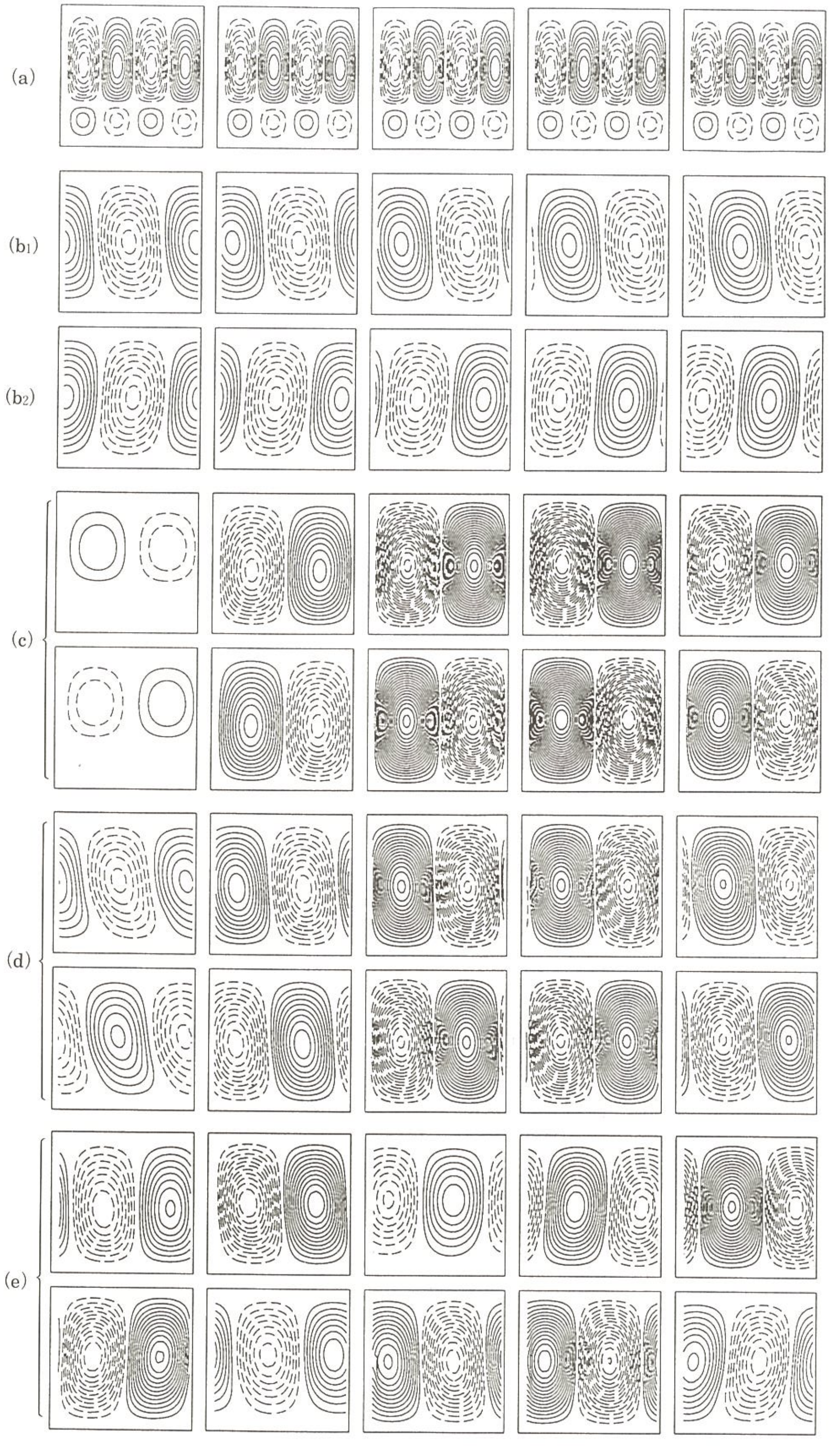

図２　伝播波と定常モード間共鳴相互作用によって形成される対流パターンの時間発展。(a)：定常モード，(b1)，(b2)：伝播波，(c)：定在波，(d)：非対称モード，(e)：変調波。図に示したのは流線の時間発展であり，時間は，各図の左から右へ，また，(c)，(d)，(e) については，左上→右上→左下→右下へと経過する。伝播波としては左右両方向への伝播が可能であるので，(b1)，(b2) のいずれかが選択される。また，非対称モードも，初期条件によって，(d) か，それを左右裏返しにしたパターンが得られる。

あり，定常モードと伝播波の熱伝導状態からの分岐は超臨界分岐であった[1,2]（通常“定在波”とは｜A_1｜＝｜A_2｜≠0，｜A_3｜＝0という状況を示すが，今回の共鳴問題では，そのような純粋な定在波は存在できず，定常モードの成分を伴った混合モードとしてのみ定在波は存在可能である)。

本研究では，2流体系のRB対流問題についての流体力学方程式から，中心多様体定理の方法を用いてA_1，A_2，A_3に対する3次元常微分方程式系（振幅方程式）を導き，分岐解析を行った。[4,5] その結果，伝播波と定常波は図1（b）に示したような，亜臨界分岐によって熱伝導状態から分岐することが明らかになった。このため，超臨界分岐を行うモード間の相互作用に関する従来の研究とは，得られる結果は質的に全く異なっている。さて，定常モードが不安定で，かつ，伝播波の存在しない領域の一部分で，定在波が安定に存在可能であること，定在波は，変調波，もしくは，“非対称モード”（｜A_1｜・｜A_2｜・｜A_3｜≠0，｜A_1｜≠｜A_2｜）に対して不安定となり，変調波と非対称モードは安定に存在する領域を有することが明らかになった。非対称モードは，定在波と伝播波を橋渡ししており，今回新たに求まったものである。結果を図2に示す。ここに示したのは流線（流れ関数の等高線）であり，流体粒子の持つ速度ベクトルは，流線に接している。実線は反時計回り，破線は時計回りを意味する。また，流線の混んでいるところは流速が大きい。例えば，図2（c）の定在波では，1周期の間に定常モード，それとは逆位相の定在モードの強度の強弱，定常モードの出現，逆位相の定在モードの強度の強弱といった一連の時間発展が生じている。これらのデータを用いたアニメーションでは，非対称モードや変調波の持つ複雑で面白い動きを楽しむことができるが，図2から，かなり複雑な挙動をしていることがお分かり頂けると思う。さて，図には示さなかったが，非対称モードが不安定になると，ホモクリニック軌道が得られること，軌道は振幅方程式に含まれるノイズ（具体的には数値積分の際の丸め誤差）に非常に敏感であり，ノイズ周期的と呼ばれる挙動を示すことなどが明らかになっている。

参考文献

1）A, Hill and I. Stewart, Dynamics and Stability of Systems, 6, 149（1991）.

2）K. Fujimura, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 340, 95（1992）.

3）D. D. Joseph and Y. Y. Renardy, “Fundamentals of Two-Fluid Dynamics, Part Ⅰ：Mathematical Theory and Applications”, Springer, Berlin, 1993.

4）K. Fujimura and Y. Y. Renardy, Physica D 85, 25（1995）.

5）K. Fujimura and Y. Y. Renardy, in“Advances in Multi-Fluid Flows”, SIAM, Philadelphia,（1996）, in press.