■乱れからの造形

熱対流分岐研究グループ　■藤　村　　薫■

Pattern Formation in Fluids

Kaoru FUJIMURA
Research Group for Bifurcation in Thermal Convection

An initial stage of pattern formation from irregular disturbances is briefly outlined for fluid motions. Spatial patterns achievable in unstably stratified plane Poiseuille flow are described as a typical example of multiple bifurcation phenomena.

木星の大赤斑や気象衛星からの映像でおなじみの大気の流れから，潮流や川の流れ，パイプラインや原子炉冷却材の流れ，扇風機やうちわの涼風，血液や分泌液の流れに至るまで，我々の身の回りには様々な流れが取り巻いているが，そうした流れには，多かれ少なかれ乱れが含まれている。そのうち，あるものは，漸近的に減衰して死に絶えてゆく運命のものであるし，またあるものは時間と共に成長し，元々の流れをすっかり変形してしまうこともある。乱れとはいうものの非常に規則的な時間的もしくは空間的構造を有するものもあるし，逆に全く不規則な，統計的にしか取り扱う気がしない類の乱れもある。多くの場合，乱れの存在は平均的な流れ場を著しく変形し，変形された流れ場は逆に乱れにエネルギーを供給して乱れを維持しようとする。さもなければ，乱れは最終的に減衰してしまう。また，乱れの存在は，分子粘性や拡散に対する実効的な粘性や拡散を飛躍的に増大させ，熱伝達や物質輸送を向上させる。従って，乱れの有無，乱れの発生過程や統計的特性を把握することは実用上も極めて重要である。

流れには，その流動様式を特徴付けるパラメターR（例えばReynolds数Reは，流れの慣性力と粘性拡散との比）が存在する。Rの値が十分小さければ，乱れは時間と共に減衰し，最終的には層流と呼ばれる全く規則的な状態が実現する。層流をぎりぎり維持できる限界は臨界点と呼ばれる。そのときのRの値をR_cで表そう。RがR_cよりもわずかに大きい場合，内在する乱れの中では臨界モードと呼ばれる最も不安定なモードだけが選択的に増幅し，それ以外のモードは速やかに減衰する。臨界モードは，Rの値によって決まる平衡状態にまで成長する。Rの値をさらに増加させると，この平衡状態を維持しきれなくなる第2の臨界値R_{2c}が現れる。$R>R_{2c}$では，平衡状態にあった臨界モードがより複雑な攪乱に対して不安定となり，一般に3次元的な構造に分化する。このような過程を幾度か経ることにより，流れ場には様々な周波数が順次含まれてゆくことになる。このようにして乱流への遷移が進行する。しかし残念なことに，近年飛躍的に発展を遂げたカオスの研究が直接助けにならないケースも依然として非常に多い。乱流遷移は攪乱の複雑な時空間発展を経て進行するが，その過程は個々の流れ場に固有の幾何形状に強く依存する。限られた単純な流れ場を除くと，理論的には，R_cの値を算出することすら困難な場合が多々あり，第3の臨界値R_{3c}以上での攪乱の挙動に関してはほとんど未解決である。代表的な例は，非平行流の安定性の問題である。そこでは，非

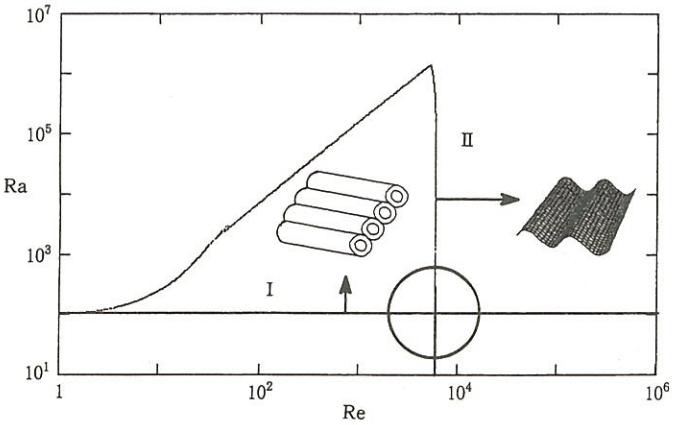

図1　水に対する臨界 Rayleigh 数の Reynolds 数依存性
I：縦ロール，II：横伝播波。図中，丸印内における縦ロールと横伝播波の相互作用の結果を図2に示している。

平行性が十分弱い場合を除くと，R_c の算出すら理論的取り扱いは全く不可能であり，現時点では膨大な数値計算に基づく固有値の勘定に頼らざるを得ないが，それすらも，極めて単純な非平行流の場合に限られる。

さて，現実に流れに内在する乱れは，初期には一般に様々な波長を持つモードから構成される波束攪乱の形をもつ。しかしそのような場合でも，臨界点近傍では，波束を構成するモードのうちで最も不安定な臨界モードに漸近的に移行することが示されている。従って，波束の中に臨界モードが一つだけ存在する場合には，少なくとも $R_c<R<R_{2c}$ においては取り扱いは比較的容易であり，臨界モードの非線形発展に空間変調の効果を取り込んで議論することができる。もっとも，それも，非常に単純な流れ場に限っての話であって，流れ場の形状が少しでも複雑になると，取り扱いは急激に困難となる。

$R=R_c$ において，複数個の空間的に異なる構造を有するモードが同時に臨界となる場合，最終的にはどのような空間構造が実現されるかという問題は，近年，多重分岐現象として，応用数学や流体力学の格好の研究課題となっている。攪乱振幅が十分小さい場合，複数個の臨界モードは全く独立に成長するため，とりたてて興味深いことは起こらない。しかし，時間が経って攪乱が有限の振幅を持つようになると，モード間の相互作用が本質的となる。ここで，我々のターゲットに話を移そう。下面加熱，上面冷却された2枚の無限の広がりを持つ水平壁の間に満たされた流体に，ある水平方向（x 方向）に一定の圧力を作用させた時実現される流れを考える。まず，圧力→0の極限は，近年カオスの研究で一躍有名になった Rayleigh-Bénard 対流の問題と一致する。（Rayleigh-Bénard 対流自体は，決して新しい話題ではなく，百年に及ぶ研究の歴史がある。）そこでは，Rayleigh 数と呼ばれる浮力と粘性拡散の比 Ra が制御パラメターとして用いられる。$Ra>Ra_c$ で実現されるのは，まっすぐな渦管が等間隔に並んだ，ロールと呼ばれる定常空間パターンであることはよく知られている。ロールの波長は線形安定性理論によって完全に決定される。しかし，水平面内ではどのような方向にも向くことが出来，方向には選択性がない。

このような状態で x 方向に圧力を作用させよう。ロールの軸が x 軸と直交する「横ロール」に対する Ra の臨界値は，加えられた流れを特徴付ける Reynolds 数 Re の増加関数であり，x 方向の流れは横ロールに対して安定化効果を及ぼす。他方，ロールの軸が流れと平行な「縦ロール」に対する Ra_c の値は Re の影響を受けない。このため，流れが重畳した Rayleigh-Bénard 対流では，縦ロールが臨界条件（Ra_c）を決定する。つまり，重畳された流れが，臨界モードとして実現されるのは縦ロールであるというパターン選択を行う。

ところが，逆に Ra→0 の極限（等温流れ）では，x 方向の流れは $Re>Re_c=5772$ において不安定となり，Tollmien-Schlichting 波として広く知られる伝播波が現れる。その結果，縦軸に Ra，横軸に Re をとると，図1に示すように，線形安定性理論の枠内では，横ロールに対する Ra_c を表わす曲線が $Re_c=5772$ という直線と接続されなければならない。従って，曲線Ⅰより上では縦ロールが，曲線Ⅱより上及び右では横モードが不安定攪乱として現れることが予想される。それでは，これら2つのモードが同時に臨界となる曲線ⅠとⅡとの交点近傍では一体どのような空間構造が現れるであろうか。

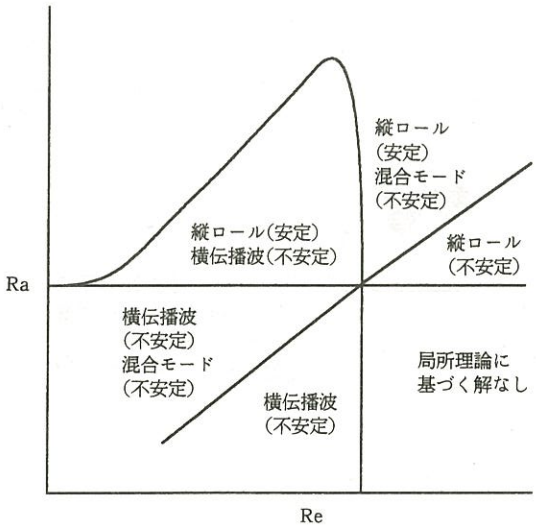

図2　水に対する安定性相図
安定な縦ロールは図1に描いた空間パターンを持つ。安定なモードが存在しない領域では，縦ロールと横伝播波が重ね合わされた混合モードに移行することが予想されるが，そのモードは数値解析もしくは実験的にしか捉えることができない。本図に記入されている理論的に予測可能な混合モードとはまったく異なったモードである。

弱非線形摂動展開理論に基づく分岐解析の結果，このような相互作用に対する流体方程式の定常解としては，純粋な横伝播波，純粋な縦ロール，並びに，縦，横両モードの成分を同時に含む混合モードの三者が存在可能であることが分かる。水に対する安定性相図を図2に示した。この図から，純粋な縦ロールは安定に存在可能なパラメター領域を有するが，純粋な横伝播波と混合モードに関しては平衡解は不安定であり，平衡解が安定な領域は存在しないことが結論できる。不安定モードだけが求められているパラメター領域では，実際にはどのような空間構造が実現されるのか，図1の2曲線の交点近傍において，理論的に予測された図2の安定なパターンは，交点からどの程度遠ざかると実験室系で実現されなくなるのか，逆に実験室系で観察される現象を全て記述するためには，どのような理論構成を行えばよいのか，といった問題を，理論的，数値解析的，並びに実験的に解決してゆく予定である。